

SOLUSI SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA SMA TINGKAT KOTA/KABUPATEN TAHUN 2007

PILIHAN GANDA

1. $[\sqrt{3} - \sqrt{5}]^2 = [1,7321 - 2,2361]^2 = [-0,5040]^2 = (-1)^2 = 1$ (Kunci C)

2. $\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} = x$ (kedua ruas dipangkatkan 3)

$$\sqrt{5} + 2 - 3\sqrt[3]{(\sqrt{5} + 2)^2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} + 3\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} \cdot \sqrt[3]{(\sqrt{5} - 2)^2} - (\sqrt{5} - 2) = x^3$$

$$4 - 3\sqrt[3]{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)} \cdot (\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}) = x^3$$

$$4 - 3x = x^3$$

$$x^3 + 3x - 4 = 0$$

Persamaan diatas hanya dipenuhi oleh $x = 1$ (Kunci B)

3. $100\% + 40\% = 140\% = \frac{140}{100} = \frac{7}{5}$

Jadi banyaknya soal yang dikerjakan Amin pada hari ini paling sedikit ada 7 butir .

(Kunci C)

4. $H = \{1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187\}$ sehingga $n(H) = 8$

Banyak himpunan bagian ada 2^n , himpunan bagian H seluruhnya ada $2^8 = 256$ buah

Himpunan bagian H yang tidak kosong = $256 - 1 = 255$. (Kunci D)

5. Misalnya $N = ab = 10a + b$ dan $M = ba = 10b + a$, maka

$$N - M = (10a + b) - (10b + a)$$

$$= 9a - 9b$$

$$= 9(a - b)$$

Bentuk terakhir ini pasti dapat dibagi 3 dan 9.

Jadi bilangan prima yang selalu habis membagi $N - M$ adalah 3. (Kunci B)

6. Karena rata-rata hitung (mean) = 10 dan median = 12, maka data yang memenuhi adalah 7, 7, 12, 12, 12

Jadi, nilai terkecil jangkauan sample = $12 - 7 = 5$. (Kunci C)

7. Misalnya peluang menemukan di antara tiga orang ada paling sedikit dua orang yang lahir dalam bulan yang sama adalah $P(A)$.

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$P(A) = 1 - \frac{{}_{12}P_3}{12^3} = 1 - \frac{12!}{12^3 \cdot 9!} = \frac{17}{72}$$

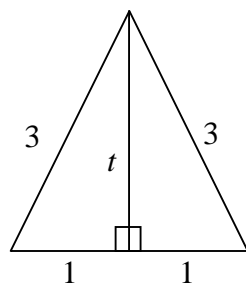
Jadi, peluang menemukan di antara tiga orang ada paling sedikit dua orang yang lahir dalam bulan yang sama adalah $\frac{17}{72}$. (Kunci A)

8. Sisi-sisi segitiga yang kelilingnya 8 adalah 2, 3, 3.

$$t = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$$

$$L = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Jadi, luas segitiga tersebut adalah $2\sqrt{2}$.



(Kunci A)

9. Misalnya keliling persegi itu masing-masing adalah $3x$ dan $2x$, sehingga sisi-sisinya adalah $\frac{3}{4}x$ dan $\frac{2}{4}x$

$$\text{Perbandingan luas kedua persegi} = \left(\frac{3}{4}x\right)^2 : \left(\frac{2}{4}x\right)^2 = 9:4.$$

(Kunci D)

$$\begin{aligned} 10. \frac{\tan^2 x + \cos^2 x}{\sin x + \sec x} &= \frac{\tan^2 x + 1 - \sin^2 x}{\sin x + \sec x} \\ &= \frac{\sec^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \sec x} \\ &= \frac{(\sec x + \sin x)(\sec x - \sin x)}{\sin x + \sec x} \\ &= \sec x - \sin x \end{aligned}$$

(Kunci B)

ISIAN SINGKAT

11. $f(g(x)) = 3$

$$f(\sqrt{x}) = 3$$

$$2\sqrt{x} - 1 = 3$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4$$

(Jawaban: 4)

12. Misalnya banyak kotak untuk 10 apel = x buah dan kotak untuk 6 apel = y , maka

$$10x + 6y = 44$$

$$5x + 3y = 22$$

Pasangan (x, y) adalah $(2, 4)$.

Jadi, banyaknya kotak yang diperlukan = $x + y = 2 + 4 = 6$ buah. (Jawaban: 6)

13. $x + y = xy - 1$

$$xy - y = x + 1$$

$$y(x - 1) = x + 1$$

$$y = \frac{x + 1}{x - 1}$$

$$y = \frac{x - 1 + 2}{x - 1} = 1 + \frac{2}{x - 1}$$

Agar y bulat, maka $x - 1$ harus merupakan factor dari 2. Dengan demikian, $x - 1 = \pm 1, \pm 2$, sehingga diperoleh $x = -1, 0, 2, 3$.

Pasangan (x, y) yang bulat adalah $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(2, 3)$, dan $(3, 2)$.

Karena $x \leq y$, maka pasangan yang memenuhi adalah $(-1, 0)$ dan $(2, 3)$.

(Jawaban: $(-1, 0)$ dan $(2, 3)$)

14. $\frac{33}{3} = 11$, $\frac{33}{3^2} = 3$, $\frac{33}{3^3} = 1$

Jadi, nilai n terbesar yang mungkin = $11 + 3 + 1 = 15$.

(Jawaban: 15)

15. Persamaan garis yang melalui $(3, 2\frac{1}{5})$ dan $(99, 68\frac{3}{5})$ adalah

$$y - 2\frac{1}{5} = \frac{68\frac{3}{5} - 2\frac{1}{5}}{99 - 3}(x - 3)$$

$$5y = \frac{83}{24}(x - 3) + 11$$

Nilai $(x - 3)$ haruslah kelipatan 24, maka koordinat titik bilangan bulat yang terletak pada garis itu adalah $(75, 52)$.

Jadi, banyaknya titik dengan koordinat bilangan bulat yang dilalui garis itu adalah 1

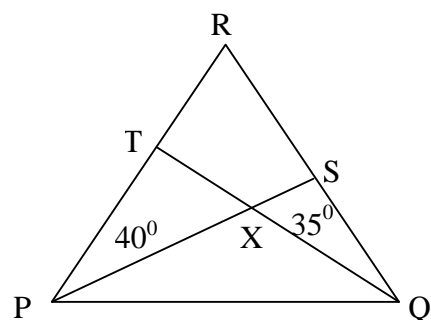
(Jawaban: 1)

16. $\angle PSR = 180^\circ - (40^\circ + 60^\circ) = 80^\circ$

$$\angle QTR = 180^\circ - (35^\circ + 60^\circ) = 85^\circ$$

$$\angle XST = 360^\circ - (80^\circ + 85^\circ + 60^\circ) = 135^\circ$$

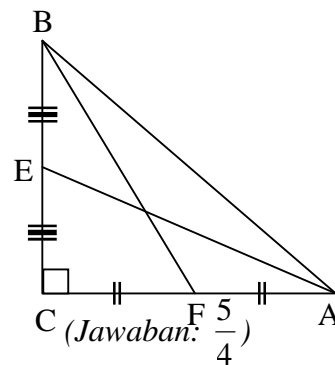
(Jawaban: 135°)



$$17. \frac{|AE|^2 + |BF|^2}{|AB|^2} = \frac{|AC|^2 + \frac{1}{2}|BC|^2 + |BC|^2 + \frac{1}{2}|AC|^2}{|AC|^2 + |BC|^2}$$

$$\frac{|AE|^2 + |BF|^2}{|AB|^2} = \frac{\frac{5}{4}(|AC|^2 + |BC|^2)}{|AC|^2 + |BC|^2}$$

$$\frac{|AE|^2 + |BF|^2}{|AB|^2} = \frac{5}{4}$$



$$18. L = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2008 & 2007 \\ 2007 & 2007 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |2007 + 2008 \times 2007 - 2007 \times 2007| = 2007$$

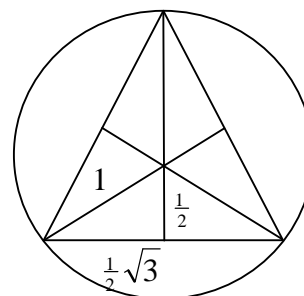
Jadi, luas jajargenjang ABCD adalah 2007.

(Jawaban: 2007)

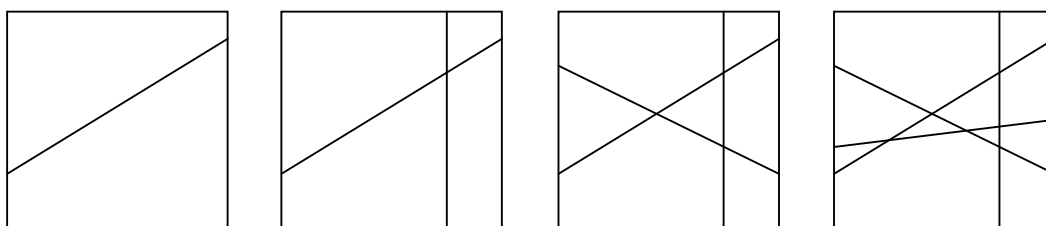
$$19. L = 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{3} = \frac{3}{4} \sqrt{3}$$

Jadi, luas maksimal segitiga sama sisi yang dapat dimuat di dalam lingkaran berjari-jari 1 adalah $\frac{3}{4} \sqrt{3}$.

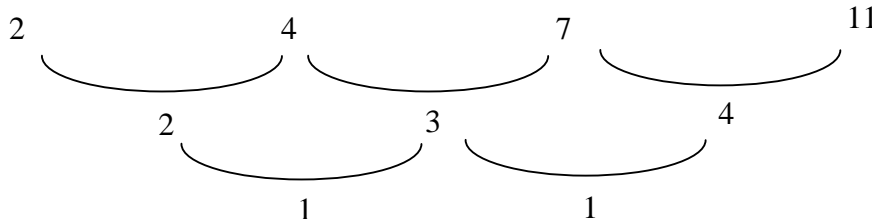
(Jawaban: $\frac{3}{4} \sqrt{3}$)



20.



dst



Misalnya $u_n = an^2 + bn + c$, maka

$$u_1 = a + b + c = 2$$

$$u_2 = 4a + 2b + c = 4$$

$$u_3 = 9a + 3b + c = 7$$

Dari ketiga persamaan di atas diperoleh $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, dan $c = 1$.

Sehingga $u_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$.

$$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1 = 2007$$

$$n^2 + n - 4012 = 0$$

Nilai n paling mendekati adalah 63.

Jadi, banyak garis lurus yang harus ditarik paling sedikit ada 63. *(Jawaban: 63)*