Soal dan Solusi (S^2) untuk:

Olimpiade Sains Nasional Bidang Matematika SMA/MA

Seleksi Tingkat Kota/Kabupaten

Tahun 2010

Tanggal: 14-29 April 2010

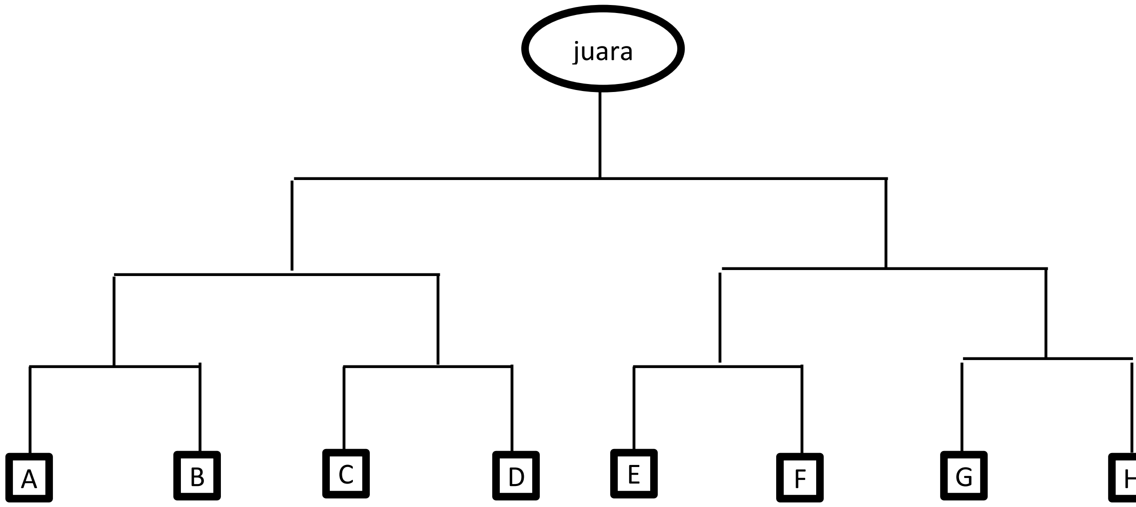
Oleh: Tjandra Satria Gunawan

SMA Negeri 1 Semarapura

1. Diketahui bahwa ada yepat 1 bilangan asli n sehingga $n^2 + n + 2010$ merupakan kuadrat sempurna. Bilangan asli n tersebut adalah....
2. Bilangan bulat yang memenuhi pertidaksamaan $x^4 \leq 8x^2 - 16$ sebanyak....
3. Pasangan bilangan asli (x,y) yang memenuhi $2x + 5y = 2010$ sebanyak....
4. Diberikan segitiga ABC, AB=AC. Jika titik P diantara A dan B sedemikian rupa sehingga AP = PC = CB, maka besarnya sudut A adalah....
5. Nilai n terkecil sehingga bilangan:

$$\underbrace{20102010....2010}_{\text{n buah 2010}}$$

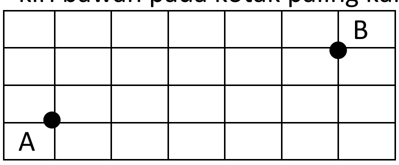
habis dibagi 99 adalah....
6. Perempat final Liga Champions 2010 diikuti 8 team A,B,C,D,E,F,G, dan H yang bertemu seperti tampak dalam undian berikut:



Setiap team mempunyai peluang $\frac{1}{2}$ untuk melaju ke babak berikutnya. Peluang kejadian A bertemu G di final dan pada akhirnya A juara adalah....
7. Polinom $P(x) = x^3 - x^2 + x - 2$ mempunyai tiga pembuat nol yaitu a, b, dan c. Nilai dari $a^3+b^3+c^3$ adalah....
8. Jika a dan b bilangan bulat sehingga $\sqrt{2010 + 2\sqrt{2009}}$ merupakan solusi persamaan kuadrat $x^2 + ax + b = 0$, maka nilai a + b adalah....
9. Banyaknya himpunan X yang memenuhi

$$\{1,2,3,\ldots,1000\} \subseteq X \subseteq \{1,2,3,\ldots,2010\}$$

Adalah...
10. Diketahui grid berukuran 4 × 8. Jika langkah yang dimungkinkan Kanan, Kiri, Atas, dan Bawah. Cara menuju B dari A dalam 8 langkah atau kurang ada sebanyak.... (A adalah titik pada ujung kiri bawah pada kotak paling kanan atas)



11. Diberikan segitiga ABC; AC : CB = 3 : 4. Garis bagi luar sudut C memotong perpanjangan BA di P (A terletak antara P dan B). Perbandingan PA : PB adalah....
12. Misalkan S menyatakan himpunan semua faktor positif dari 2010^2. Sebuah bilangan diambil secara acak dari S. Peluang bilangan yang terambil habis dibagi 2010 adalah....
13. Diketahui p adalah bilangan prima sehingga terdapat pasangan bilangan bulat positif (x,y) yang memenuhi $x^2 + xy = 2y^2 + 30p$. Banyaknya pasangan bilangan bulat positif (x,y) yang memenuhi ada sebanyak....

14. Pada sebuah persegi panjang berukuran 25 × 20 akan dibuat bujursangkar sehingga menutupi seluruh bagian persegi panjang tersebut. Berapa banyak bujursangkat yang mungkin dapat dibuat?
15. AB, BC dan CA memiliki panjang 7,8,9, berturut-turut. Jika D merupakan titik tnggi dari B, tentukan panjang AD.
16. Jika –5x + 2000 merupakan sisa pembagian suku banyak P(x) oleh $x^2 + x - 2$, maka sisa pembagian P(x) oleh x+2 adalah....
17. Diketahui n adalah bilangan asli. Jika himpunan penyelesaian dari
$$\sqrt[n]{x^{x^2}} \leq x^{\sqrt[n]{x^2}}$$
Adalah { x | 0 < x ≤ $\sqrt[5]{216}$ }, maka n= ....
18. Misalkan persegi 4 × 4 akan diberi warna hitam dan putih pada tiap kotaknya. Cara pewarnaan sedemikian sehingga warna hitam hanya diberikan pada 3 kotak dan sisanya 13 warna putih sebanyak.... (Pewarnaan dianggap sama jika didapat dari hasil rotasi yang sama terhadap persegi 4 × 4)
19. Nilai x yang memenuhi 0 ≤ x ≤ π dan
$$\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)} = 2^{2010}\sqrt{2}\,\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\,.\,.\,.\,\cos\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)$$
Adakah....
20. Diketahui segitiga ABC siku-siku di A, dan pada masing-masing sisi dibuat setengah lingkaran kearah keluar. Jika luas setengah lingkaran pada sisi AB dan AC adalah 396 dan 1100, berturut-turut, maka luas setengah lingkaran pada sisi BC adalah....

<u>Cara Penyelesaian:</u>

1. Karena nilai dari $n^2 + n + 2010$ dengan n adalah bilangan asli adalah merupakan suatu bilangan asli yang dikuadratkan (kuadrat sempurna). Misalkan bilangan asli itu adalah x, maka persamaan pada soal dapat ditulis lagi sebagai: $n^2 + n + 2010 = x^2$. Kemudian persamaan tersebut disederhanakan menjadi:
$$n^2 + n = x^2 - 2010$$
Dengan menambah 1 variabel y^2, maka persamaan dapat menjadi:
$$\boldsymbol{n^2 + n + y^2 = x^2 - 2010 + y^2}$$
Andaikan:
$$(n+y)^2 = x^2 - 2010 + y^2$$
Maka:
$$\boldsymbol{n^2 + 2yn + y^2 = x^2 - 2010 + y^2}$$
Dengan mengurangkan persamaan yang dicetak tebal, maka:
$$\cancel{n} - 2y\cancel{n} = 0$$
$$1 - 2y = 0$$
$$2y = 1$$
$$y = \frac{1}{2}$$
Dengan mensubtitusikan niai $y = \frac{1}{2}$ ke persamaan $(n+y)^2 = x^2 - 2010 + y^2$, maka lahirlah persamaan baru, yaitu:
$$\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - 2010 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - 2010 + \frac{1}{4}$$
$$4\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 = 4\left(x^2 - 2010 + \frac{1}{4}\right)$$
$$2^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 = 4x^2 - 8040 + 1$$
$$\left[2\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4x^2 - 8039$$
$$(2n+1)^2 = 4x^2 - 8039$$
$$8039 + (2n+1)^2 = 4x^2$$
$$8039 = 2^2x^2 - (2n+1)^2$$
$$8039 = (2x)^2 - (2n+1)^2$$
$$8039 = \big(2x - (2n+1)\big)\big(2x + (2n+1)\big)$$
$$8039 = (2x - 2n - 1)(2x + 2n + 1)$$
$$\boldsymbol{(2x - 2n - 1)(2x + 2n + 1) = 8039}$$
Sehingga, karena x dan n adalah bilangan asli, maka nilai 2x + 2n + 1 juga merupakan bilangan asli ganjil. Dan 2x – 2n – 1 tentu juga bilangan asli ganjil. Karena kedua bilangan asli

ini adalah faktor dari 8039 dan 8039 adalah bilangan prima, maka faktor yang memenuhi hanyalah 8039 & 1. Kita ketahui bahwa 8039 > 1, jelas pula bahwa 2x + 2n + 1 > 2x – 2n – 1 (karena x & n adalah bilangan asli). Dari hal-hal diatas, dapat disimpulkan bahwa persamaan yang memenuhi hanyalah:

- 2x + 2n + 1 = 8039
- 2x – 2n – 1 = 1

Jika kedua persamaan ini dikurangkan, maka didapat:
4n + 2 = 8038 → 4n = 8038 – 2
Sehingga nilai n:

$$n = \frac{8038 - 2}{4} = \frac{8036}{4} = 2009$$

Sehingga didapat **<u>n = 2009.</u>**

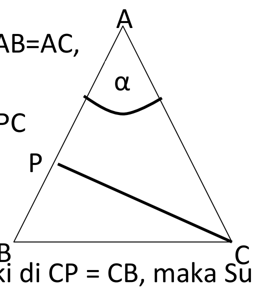
2. Akan dicari banyaknya bilangan bulat yang memenuhi $x^4 \leq 8x^2 - 16$. Langkah awal adalah menyederhanakan pertidaksamaan pada soal:

$$x^4 \leq 8x^2 - 16$$
$$x^4 - 8x^2 + 16 \leq 0$$
$$(x^2 - 4)^2 \leq 0$$

Karena jika suatu bilangan real dikuadratkan nilainya akan swelalu ≥0 maka persamaan tersebut akan mempunyai penyelesaian hanya jika $(x^2 - 4)^2 = 0$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $x^2 - 4 = 0$ sehingga $x^2 = 4$ jadi nilai x yang memenuhi adalah $\pm\sqrt{4} = \pm 2$. Jadi bilangan bulat x yang memenuhi, yaitu 2 dan –2. Sehingga **<u>banyaknya bilangan bulat yang memenuhi pertidaksamaan tersebut ada 2.</u>**

3. Akan dicari pasangan bilangan asli (x,y) yang memenuhi persamaan 2x + 5y = 2010. Karena 5|2010 dan 2|2010 maka 10|2010 sehingga 2x + 5y = 2010 mempunyai solusi penyelesaian bilangan asli (x,y). Misalkan nilai x=0, maka nilai y=2010 : 5 = 402, sehingga kita dapat (x,y) adalah (0,402) namun penyelesaian ini tidak memenuhi, karena nilai x bukan bilangan asli. Namun karena nilai x & y sudah merupakan bilangan bulat, maka persamaan diophantine berlaku. Kita telah dapat bahwa x_0=0 dan y_0=402. Maka solusi persamaan diophantinenya adalah $x = 0 + \frac{5}{GCD\,(5,2)}k = 0 + 5k = 5k$ dan $y = 402 - \frac{2}{GCD\,(5,2)}k = 402 - 2k$ dengan k adalah konstanta bilangan bulat. Karena x dan y adalah bilangan asli, maka x > 0 dan y > 0, Sehingga (5k>0 → **k>0**) dan (402 – 2k > 0 → 402 > 2k → 2k < 402 → **k < 201**). Sehingga kita mendapatkan nilai 0<k<201 sehingga nilai k yang mungkin adalah {1,2,3,...,200} sebanyak 200 bilangan. Sehingga **<u>pasangan bilangan asli (x,y) yang memenuhi ada 200 pasang.</u>**

4. Langkah pertama adalah gambarkan maksud soalnya:



Misalkan sudut BAC adalah α, Karena segitiga ABC sama kaki di AB=AC, Maka Sudut ABC = Sudut BCA. Karena sudut ABC + Sudut BCA + Sudut BAC=180^o, maka **Sudut $\boldsymbol{ABC} = \frac{\mathbf{180 - \propto}}{\mathbf{2}}$**. Karena segitiga APC juga sama kaki di AP=PC, Maka sudut PAC= Sudut ACP= α. Karena Sudut APC + Sudut ACP + Sudut PAC= 180^o, maka sudut APC = 180 - 2α. Karena sudut APC + Sudut BPC = 180^o maka Sudut BPC = 180 – (180 - 2α) = 2α. Karena Segitiga PBC sama kaki di CP = CB, maka Sudut BPC = Sudut PBC = 2α. Dari gambar, jelas bahwa sudut PBC = Sudut ABC. Sahingga **Sudut ABC=2α**. Karena sudut ABC juga $\frac{180 - \propto}{2}$, maka nilai α dapat dihitung. Kita dapat persamaan:

$$\frac{180 - \propto}{2} = 2 \propto$$
$$180 - \propto = 4 \propto$$
$$180 = 4 \propto + \propto = 5 \propto$$
$$5 \propto = 180$$
$$\propto = \frac{180}{5} = 36$$

Sehingga didapat nilai $\alpha = 36^o$, karena sudut α adalah sudut BAC = Sudut A, maka **besarnya sudut A = 36^o**

5. Agar suatu bilangan habis dibagi 99, maka bilangan tersebut harus juga habis dibagi oleh faktor dari 99. Karena 9 dan 11 adalah termasuk faktor-faktor dari 99, maka bilangan tersebut harus habis dibagi juga oleh 11 dan 9. Agar suatu bilangan habis dibagi 9, maka jumlah digit-digitnya habis dibagi 9, dan agar suatu bilangan habis dibagi 11, maka jumlah digit pada urutan ganjil dikurangi jumlah digit pada urutan genap habis dibagi 11. Jumlah digit 2010 adalah 2 + 0 + 1 + 0 = 3, jumlah digit urutan ganjil pada angka 2010 adalah 2 + 1 = 3 dan jumlah digit pada urutan genapnya adalah 0 + 0 = 0 , sehingga jumlah digit pada urutan ganjil dikurangi jumlah digit pada urutan genap adalah 3 – 0 = 3 atau 2 – 0 + 1 – 0 = 3. Karena banyaknya 2010 adalah n kali, maka 3n harus habis dibagi 9 dan 11. Karena 9 dan 11 relatif prima, maka LCM (9,11) adalah 99, sehingga 3n harus habis dibagi 99. Karena 3 habis membagi 99, maka dapat disimpulkan bahwa nilai minimum n adalah $\frac{99}{3} = 33$. Sehingga **nilai minimum n adalah 33.**
6. Pada diagram pada soal, Agar A menjadi juara A perlu 3 kali bertanding dan menang pada lawannya, sedangkan G hanya memasuki final dan akhirnya kalah melawan A. Agar G masuk ke final, G perlu 2 kali bertanding dan menang pada lawannya. Sehingga pertandingan yang diperhitungkan pada peluang kejadian adalah 3 pertandingan pada A, dan 2 pertandingan pada G. Sehingga total pertandingan yang diperhitungkan ada 2 + 3 = 5 pertandingan. Karena masing-masing pertandingan mempunyai peluang menang atau kalah sebesar 50% atau $\frac{1}{2}$, maka peluang agar hal itu terjadi adalah:
$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1^5}{2^5} = \frac{1}{32}$$
Sehingga **peluang kejadian A bertemu G di Final dan pada akhirnya A juara adalah $\left(\frac{1}{32}\right)$.**
7. Pada soal, polinom $x^3 - x^2 + x - 2 = 0$ memiliki akar-akar a, b, dan c. Dari hal tersebut dapat diketahui 3 hal, yaitu:
   - a + b + c = 1
   - ab + bc + ac = 1
   - abc = 2

   akan dicari nilai dari $a^3 + b^3 + c^3$. Langkah pertama adalah membuat persamaan umumnya:
$$(a+b+c)^3 = (a+b+c)^3$$
$$(a^3+b^3+c^3) + (a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = (a+b+c)^3$$
$$(a^3+b^3+c^3) + \left[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^{\mathbf{3}} - \left(\boldsymbol{a}^{\mathbf{3}}+\boldsymbol{b}^{\mathbf{3}}+\boldsymbol{c}^{\mathbf{3}}\right)\right] = (a+b+c)^3$$
$$(a^3+b^3+c^3) = (a+b+c)^3 - \left[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^{\mathbf{3}} - \left(\boldsymbol{a}^{\mathbf{3}}+\boldsymbol{b}^{\mathbf{3}}+\boldsymbol{c}^{\mathbf{3}}\right)\right]$$
   Sekarang akan disederhanakan nilai dari $[(a + b + c)^3 – (a^3 + b^3 + c^3)]$. Karena pengembangan dari $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 6abc$. Maka nilai dari $[(a + b + c)^3 – (a^3 + b^3 + c^3)] = 3a^2b + 3ab^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 6abc$. Diketahui pula bahwa $(ab+bc+ac)(a+b+c)= a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2 + 3abc$, kita sebut persamaan 1. Maka dari persamaan tadi didapat bahwa $3a^2b + 3ab^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 6abc$, nilai ini akan identik dengan: $(3a^2b + 3ab^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 9abc) – 3abc$. Persamaan tersebut dapat disederhanakan menjadi: $3(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2 + abc) – 3abc$. Dengan mensubtitusikan persamaan 1 ke persamaan diatas maka persamaan akan menjadi: $3(ab + bc + ac)(a + b + c) – 3abc$. Sehingga disimpulkan nilai dari $[(a + b + c)^3 – (a^3 + b^3 + c^3)]$ adalah sama dengan $3(ab + bc + ac)(a + b + c) – 3abc$. Tadi telah kita dapat bahwa:
$$(a^3+b^3+c^3) = (a+b+c)^3 - \left[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^{\mathbf{3}} - \left(\boldsymbol{a}^{\mathbf{3}}+\boldsymbol{b}^{\mathbf{3}}+\boldsymbol{c}^{\mathbf{3}}\right)\right]$$
   Dengan mengganti nilai yang bercetak tebal menjadi $3(ab + bc + ac)(a + b + c) – 3abc$, maka persamaan menjadi:
$$(a^3+b^3+c^3) = (a+b+c)^3 - [3(ab+bc+ac)(a+b+c) - 3abc]$$
   Sehingga persamaan yang digunakan adalah:
$$(a^3+b^3+c^3) = (a+b+c)^3 - 3[(ab+bc+ac)(a+b+c) - abc]$$

Dengan mensubtitusikan nilai a + b + c ; ab + bc + ac ; dan abc ke dalam persamaan, maka didapat:

$$(a^3 + b^3 + c^3) = (1)^3 - 3[(1)(1) - 2] = 1 - 3(1 - 2) = 1 - 3(-1) = 1 + 3 = \mathbf{4}$$

Sehingga didapat bahwa **nilai dari $a^3 + b^3 + c^3 = 4$.**

8. Dengan menggunakan rumus abc, maka akar- akar dari $x^2 + ax + b$ adalah:

$$\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4\mathrm{b}}}{2}$$

Dari soal diketahui juga bahwa akar-akar dari persamaan tersebut adalah $\sqrt{2010 + 2\sqrt{2009}}$. Sehingga dapat dibuat persamaan sebagai berikut:

$$\sqrt{2010 + 2\sqrt{2009}} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4\mathrm{b}}}{2}$$

Kemudian persamaan tersebut akan disederhanakan dengan proses berikut:

$$\sqrt{2009 + 1 + 2\sqrt{2009}} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4\mathrm{b}}}{2}$$

$$\sqrt{2009 + 1 + 2\sqrt{2009}} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4\mathrm{b}}}{2}$$

$$\sqrt{2009 + 2\sqrt{2009} + 1} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4\mathrm{b}}}{2}$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{2009}\right)^2 + 2\sqrt{2009}\sqrt{1} + \left(\sqrt{1}\right)^2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4\mathrm{b}}}{2}$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{2009} + \sqrt{1}\right)^2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4\mathrm{b}}}{2}$$

$$\sqrt{2009} + \sqrt{1} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4\mathrm{b}}}{2}$$

$$\sqrt{2009} + 1 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4\mathrm{b}}}{2}$$

$$2\left(\sqrt{2009} + 1\right) = -a \pm \sqrt{a^2 - 4\mathrm{b}}$$

$$2\sqrt{2009} + 2 = -a \pm \sqrt{a^2 - 4\mathrm{b}}$$

$$\sqrt{4}\sqrt{2009} + 2 = -a \pm \sqrt{a^2 - 4\mathrm{b}}$$

$$\sqrt{4.2009} + 2 = -a \pm \sqrt{a^2 - 4\mathrm{b}}$$

$$\sqrt{8036} + 2 + a = \pm\sqrt{a^2 - 4\mathrm{b}}$$

$$a + 2 = \pm\sqrt{a^2 - 4\mathrm{b}} - \sqrt{8036}$$

$$(a + 2)^2 = \left(\pm\sqrt{a^2 - 4\mathrm{b}} - \sqrt{8036}\right)^2$$

$$(a + 2)^2 = a^2 - 4b + 8036 \pm 2\sqrt{8036}\sqrt{a^2 - 4b}$$

$$\cancel{a^2} + 4a + 4 = \cancel{a^2} - 4b + 8036 \pm 2\sqrt{8036}\sqrt{a^2 - 4b}$$

$$4a + 4 = -4b + 8036 \pm 2\sqrt{8036(a^2 - 4\mathrm{b})}$$

$$4a + 4b + 4 - 8036 = \pm 2\sqrt{8036(a^2 - 4\mathrm{b})}$$

$$4a + 4b - 8032 = \pm 2\sqrt{4.2009(a^2 - 4\mathrm{b})}$$

$$4a + 4b - 8032 = \pm 2\sqrt{4}\sqrt{2009(a^2 - 4\mathrm{b})}$$

$$4a + 4b - 8032 = \pm 2.2\sqrt{2009(a^2 - 4\mathrm{b})}$$

$$4a + 4b - 8032 = \pm 4\sqrt{2009(a^2 - 4\mathrm{b})}$$

$$\frac{4a + 4b - 8032}{4} = \pm\sqrt{2009(a^2 - 4\mathrm{b})}$$

$$a + b - 2008 = \pm\sqrt{2009(a^2 - 4\mathrm{b})}$$

$$(a + b) - 2008 = \pm\sqrt{2009(a^2 - 4\mathrm{b})}$$

$$[(a + b) - 2008]^2 = \left(\pm\sqrt{2009(a^2 - 4\mathrm{b})}\right)^2$$

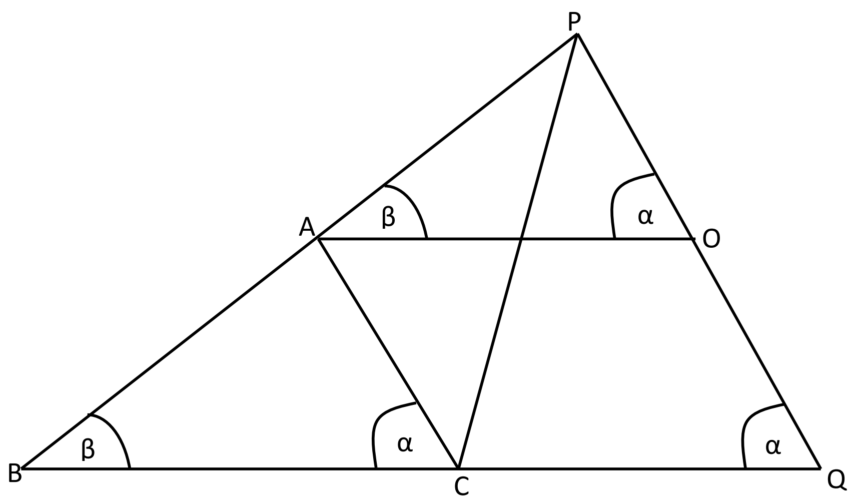
$$(a+b)^2-2.2008(a+b)+2008^2=2009(a^2-4\text{b})$$
$$a^2+2ab+b^2-4016(a+b)+2008^2=2009a^2-8036b$$
$$a^2+2ab+b^2-4016a-4016b+2008^2=2009a^2-8036b$$
$$a^2+2ab+b^2-4016b+2008^2+8036b=4016a+2009a^2$$
$$a^2+2ab+b^2+2008^2+8036b-4016b=4016a+2009a^2$$
$$a^2+2ab+b^2+2008^2+4020b=4016a+2009a^2$$
$$b^2+(2ab+4020b)+a^2+2008^2=4016a+2009a^2$$
$$b^2+(2ab+4020b)+2008^2=4016a+2009a^2-a^2$$
$$b^2+(2ab+4020b)+2008^2=2008a^2+4016a$$
$$b^2+(2a+4020)b+(2008^2)-(2008a^2+4016a)=0$$
$$b^2+(2a+4020)b-(2008a^2+4016a)+(2008^2)=0$$
$$b^2+(2a+4020)b-(2008a^2+4016a-2008^2)=0$$

Menurut rumus abc, maka nilai b adalah:

$$b=\frac{-(2a+4020)\pm\sqrt{(2a+4020)^2+4(2008a^2+4016a-2008^2)}}{2}$$
$$b=\frac{-(2a+4020)}{2}\pm\frac{\sqrt{(2a+4020)^2+4(2008a^2+4016a-2008^2)}}{2}$$
$$b=\frac{-\cancel{2}(a+2010)}{\cancel{2}}\pm\frac{\sqrt{(2a+4020)^2+4(2008a^2+4016a-2008^2)}}{\sqrt{2^2}}$$
$$b=-(a+2010)\pm\frac{\sqrt{(2a+4020)^2+4(2008a^2+4016a-2008^2)}}{\sqrt{4}}$$
$$b=-(a+2010)\pm\sqrt{\frac{(2a+4020)^2+4(2008a^2+4016a-2008^2)}{4}}$$
$$b=-a-2010\pm\sqrt{\frac{(2a+4020)^2}{4}+\frac{\cancel{4}(2008a^2+4016a-2008^2)}{\cancel{4}}}$$
$$b=-a-2010\pm\sqrt{\frac{(2a+4020)^2}{2^2}+(2008a^2+4016a-2008^2)}$$
$$a+b=-2010\pm\sqrt{\left(\frac{2a+4020}{2}\right)^2+(2008a^2+4016a-2008^2)}$$
$$a+b=-2010\pm\sqrt{\left(\frac{\cancel{2}(a+2010)}{\cancel{2}}\right)^2+(2008a^2+4016a-2008^2)}$$
$$a+b=-2010\pm\sqrt{(a+2010)^2+(2008a^2+4016a-2008^2)}$$
$$a+b=-2010\pm\sqrt{(a^2+2a.2010+2010^2)+(2008a^2+4016a-2008^2)}$$
$$a+b=-2010\pm\sqrt{a^2+4020a+2010^2+2008a^2+4016a-2008^2}$$
$$a+b=-2010\pm\sqrt{2009a^2+8036a+(2010^2-2008^2)}$$
$$a+b=-2010\pm\sqrt{2009a^2+8036a+(2010-2008)(2010+2008)}$$
$$a+b=-2010\pm\sqrt{2009a^2+8036a+(2)(4018)}$$
$$a+b=-2010\pm\sqrt{2009a^2+8036a+8036}$$
$$a+b=-2010\pm\sqrt{2009.a^2+2009.4a+2009.4}$$
$$a+b=-2010\pm\sqrt{2009(a^2+4a+4)}$$
$$a+b=-2010\pm\sqrt{2009(a+2)^2}$$
$$a+b=-2010\pm\sqrt{(a+2)^2}\sqrt{2009}$$
$$a+b=-2010\pm(\text{a}+2)\sqrt{2009}$$

Karena a dan b adalah bilangan bulat, maka nilai a + b adalah bilangan bulat. Karena – 2010 sudah bulat, maka nilai $(a+2)\sqrt{2009}$ harus merupakan bilangan bulat, sedangkan $\sqrt{2009}$ bukan merupakan bilangan bulat, maka nilai ini harus dihilangkan. Untuk menghilangkan $\sqrt{2009}$, maka harus dikalikan 0 sehingga a + 2 harus = 0. Maka nilai $(a+2)\sqrt{2009}$ adalah 0 sehingga a + b = – 2010 ± 0 = – 2010. Jadi **<u>nilai a + b = – 2010.</u>**

9. Karena {1,2,3,...,1000} adalah himpunan bagian X yang juga merupakan himpunan bagian dari himpunan yang beranggotakan {1,2,3,...,2010}, maka anggota himpunan X adalah {1,2,3,...,1000,M} dengan M adalah himpunan yang beranggotakan bilangan antara 1001-2010. Sehinggabanyaknya anggota M adalah berkisar antara 0-1010. Sehingga banyaknya himpunan M yang memenuhi adalah:
$$C_0^{1010} + C_1^{1010} + \cdots + C_{1009}^{1010} + C_{1010}^{1010}$$
Karena telah diketahui bahwa:
$$C_0^n + C_1^n + \cdots + C_{n-1}^n + C_n^n = 2^n$$
Maka nilai n dari $C_0^{1010} + C_1^{1010} + \cdots + C_{1009}^{1010} + C_{1010}^{1010}$ adalah 1010 sehingga:
$$C_0^{1010} + C_1^{1010} + \cdots + C_{1009}^{1010} + C_{1010}^{1010} = 2^{1010}$$
Maka banyaknya himpunan M yang memenuhi ada 2^{1010}. Karena anggota himpunan M digabung dengan anggota himpunan yang beranggotakan {1,2,3,...,1000} adalah anggota himpunan X. Maka banyaknya himpunan M yang memenuhi sama dengan banyaknya himpunan X yang memenuhi, sehingga **<u>banyaknya himpunan yang memenuhi ada 2^{1010}.</u>**
10. Pada gambar, langkah untuk menuju titik A ke titik B minimum adalah 7 langkah. Karena yang diperbolehkan ada 8 langkah atau kurang, maka langkah pertama adalah menganalisa apakah mungkin dengan 8 langkah dari titik A bisa sampai ke titik B. Agar ke posisi B, jalan ke kanan yang dibutuhkan ada 5 langkah, sedangkan jalan ke atas yang diperlukan ada 2 langkah, sehingga apabila langkah yang digunakan adalah lebih dari 7, maka untuk ke titik B, harus menempuh larak balik, (misalnya lebih ke kanan satu kali, maka untuk ke titik B, harus kembali ke kiri 1 kali). Sehingga langkah yang mungkin agar sampai ke b adalah, langkah minimum + 2 kali langkah tambahan, jika dimisalkan langkah tambahan tersebut adalah n langkah, maka langkah yang dimungkinkan untuk sampai ke B adalah 7 + 2n langkah, dengan n harus merupakan bilangan bulat non negatif. Sehingga tidaklah mungkin dengan 8 langkah bisa sampai ke titik B. Karena itu, jumlah langkah yang mungkin dan diperbolahkan untuk sampai ke B adalah hanya 7 langkah (5 langkah ke kanan, dan 2 langkah ke atas). Misalkan langkah ke kanan dilambangkan dengan k, dan langkah ke atas dilambangkan dengan a, maka banyaknya cara untuk sampai ke titik b adalah sama dengan banyaknya cara menyusun huruf “kkkkkaa”. Sehingga banyaknya cara adalah:
$$\frac{(total\ semua\ huruf)!}{(banyak\ huruf\ "k")!\,(Banyak\ huruf\ "a")!} = \frac{7!}{5!\,2!} = \frac{6\times 7}{2\times 1} = 3\times 7 = 21$$
Sehingga **<u>total cara ada 21 langkah.</u>**
11. Langkah pertama adalahgambarkan maksud soalnya:



Dari gambar, didapat bahwa ∠ACB+∠ACP+∠PCQ=180^o dan ∠ACB=α, maka ∠ACP+∠PCQ=180 – α. Karena CP merupakan garis bagi luar, maka ∠ACP=∠PCQ. Sehingga ∠PCQ+∠PCQ=2∠PCQ=180=α. Maka $\boldsymbol{\angle PCQ = \frac{180-\alpha}{2}}$. Dari gambar, didapat pula bahwa ∠PCQ+∠CQP+∠CPQ=180^o, sehingga didapat: ∠CPQ=180–(∠PCQ+∠CQP). Telah diketahui bahwa ∠CQP=α dan $\angle PCQ = \frac{180-\alpha}{2}$, dengan memasukkan nilai ini ke persamaan, maka didapat:

$$\angle CPQ = 180 - \left(\frac{180-\alpha}{2} + \alpha\right) = 180 - \left(\frac{180-\alpha}{2} + \frac{2\alpha}{2}\right) = 180 - \left(\frac{180+2\alpha-\alpha}{2}\right)$$

$$\angle CPQ = 180 - \left(\frac{180+\alpha}{2}\right) = \frac{360}{2} - \frac{180+\alpha}{2} = \frac{360-(180+\alpha)}{2} = \frac{360-180-\alpha}{2}$$

$$\boldsymbol{\angle CPQ = \frac{180-\alpha}{2}}$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa ∠CPQ=∠PCQ. Pada segitiga CPQ, berlaku aturan sinus:

$$\frac{PQ}{\sin\angle PCQ} = \frac{CQ}{\sin\angle \mathrm{CPQ}}$$

Karena ∠CPQ=∠PCQ Maka:

$$\frac{PQ}{\sin\angle PCQ} = \frac{CQ}{\sin\angle \mathrm{PCQ}}$$

$$\frac{\cancel{\sin\angle \mathrm{PCQ}}}{\cancel{\sin\angle PCQ}} = \frac{CQ}{PQ}$$

Sehingga:

$$\frac{CQ}{PQ} = 1$$

$$CQ = PQ$$

Maka dapat disimpulkan bahwa segitiga CPQ sama kaki dengan panjang CQ = PQ. Pada gambar, diketahui pula bahwa PO = PQ – OQ, Sedangkan OQ = AC, dan PQ=CQ, sehingga didapat: PO = CQ – AC. Pada gambar, jelas bahwa CQ = AO Sehingga: **PO = AO – AC.**

Pada soal, diminta perbandingan PA : PB, Karena segitiga AOP dengan Segitiga ABC adalah sebangun, maka PA : AB = PO : AC. Karena PO = AO – AC, maka PA : AB = (AO – AC) : AC karena pada kesebangunan didapat juga **PA : AB = AO : BC**, maka dapat disimpulkan bahwa: PA : AB = (AO – AC) : AC = AO : BC. Karena (AO – AC) : AC = AO : BC, maka panjang AO dapat dicari dengan persamaan dan proses berikut:

$$\frac{AO-AC}{AC} = \frac{AO}{BC} \quad\Big|\quad \frac{\cancel{AO}}{\cancel{AO}} - \frac{AC}{AO} = \frac{AC}{BC} \quad\Big|\quad \frac{AC}{BC} + \frac{AC}{AO} = 1 \quad\Big|\quad \frac{1}{AO} = \frac{\left(1-\frac{AC}{BC}\right)}{AC}$$

$$\frac{AO-AC}{AO} = \frac{AC}{BC} \quad\Big|\quad 1 - \frac{AC}{AO} = \frac{AC}{BC} \quad\Big|\quad \frac{AC}{AO} = 1 - \frac{AC}{BC} \quad\Big|$$

$$AO = \frac{AC}{1-\frac{AC}{BC}} = \frac{AC}{1-\frac{AC}{BC}}.\frac{BC}{BC} = \frac{AC.BC}{\left(1-\frac{AC}{BC}\right).BC} = \frac{AC.BC}{BC-AC}$$

Sehingga didapat: $AO = \frac{AC.BC}{BC-AC}$. dengan mensubtitusikan nilai AO ke perbandingan PA : AB = AO : BC maka didapat:

$$\frac{PA}{AB} = \frac{AO}{BC}$$

$$\frac{PA}{AB} = \frac{\left(\frac{AC.BC}{BC-AC}\right)}{BC} = \frac{AC.\cancel{BC}}{\cancel{BC}(BC-AC)} = \frac{AC}{BC-AC}$$

Sehingga didapat: **PA : AB = AC : (BC – AC)**. Karena pada soal diketahui AC : BC = 3 : 4, maka:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{3}{4} \to 4.AC = 3.BC \to \frac{4}{3}AC = BC \to BC = \frac{4}{3}AC$$

Dengan mensubtitusikan nilai $BC = \frac{4}{3}AC$ ke persamaaan $\frac{PA}{AB} = \frac{AC}{BC-AC}$, maka didapat:

$$\frac{PA}{AB}=\frac{AC}{\frac{4}{3}AC-AC}=\frac{\cancel{AC}}{\left(\frac{4}{3}-1\right)\cancel{AC}}=\frac{1}{\frac{4}{3}-1}=\frac{1}{\frac{4}{3}-\frac{3}{3}}=\frac{1}{\left(\frac{4-3}{3}\right)}=\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)}=\frac{3.1}{1}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{1}}=\mathbf{3}$$

Sehingga **<u>didapat PA : AB = 3 : 1 = 3.</u>**

12. Karena $2010^2 = (2 \times 3 \times 5 \times 67)^2$, maka faktor positif dari 2010^2 pasti akan mempunyai faktor prima sesuai dengan jumlah yang ≤ faktor prima dalam tabel berikut:

2	3	5	67
2	3	5	67

Contoh:

- 45 adalah salah satu faktor dari 2010^2, dan $45= 3^2 \times 5 = 3 \times 3 \times 5$. Angka |3|3|5| ini ada dalam tabel.
- 27 bukan faktor dari 2010^2, walaupun $27 =3^3 = 3 \times 3 \times 3$, namun angka |3|3|3| tidak ada semua dalam tabel, karena angka 3 dalam tabel hanya ada 2.

Dari contoh tersebut, maka dapat dihitung banyaknya faktor positif dari 2010^2. Banyaknya faktor positif dari 2010 adalah cara memilih fakror prima yang ada dalam tabel tersebut. Juga diperbolehkan untuk tidak memilih dari tabel tersebut, karena 1×2010^2 juga termasuk faktor dari 2010^2. Sehingga cara memilih 0 faktor prima dari tabel tersebut ada $C_0^n = \mathbf{1}$ **cara**. Kemudian karena isi baris 1 dan baris 2 adalah sama, maka cara memilih faktor didasarkan pada cara memilih kolom pada tabel tersebut kemudian dikali cara memilih jumlah baris rangkap atau tidak. Cara memilih 1 kolom dari 4 kolom ada 4 cara, sedangkan plihan baris ada 2^1=2 cara, sehingga cara memilih 1 kolom ada 4 × 2 = **8 cara**. Kemudian untuk memilih 2 dari 4 kolom ada $C_2^4=\frac{4!}{(4-2)!2!}=\frac{4!}{2!2!}=\frac{4.3.2.1}{2.1.2.1}=\frac{24}{4}=6$ cara. Sedangkan pilihan baris ada 2^2=4 cara, sehingga cara memilih 2 kolom ada 6 × 4 = **24 cara.** Kemudian untuk memilih 3 dari 4 kolom ada $C_3^4=\frac{4!}{(4-3)!3!}=\frac{4!}{1!3!}=\frac{4.3.2.1}{1.3.2.1}=\frac{24}{6}=4$ cara. Sedangkan pilihan baris ada 2^3=8 cara, sehingga cara memilih 3 kolom ada 4 × 8 = **32 cara.** Kemudian untuk memilih 4 dari 4 kolom ada $C_4^4=\frac{4!}{(4-4)!4!}=\frac{4!}{0!4!}=1$ cara. Sedangkan pilihan baris ada 2^4=16 cara, sehingga cara memilih 4 kolom ada 1 × 16 = **16 cara.** Jadi banyaknya faktor positif dari 2010^2 ada 1 + 8 + 24 + 32 + 16 = **81 faktor**. Sedangkan faktor 2010^2 yang habis dibagi 2010 pasti memenuhi bentuk 2010n, jadi ini memiliki faktor 2 × 3 × 5 × 67 × n. Dan n adalah sisa faktor prima 2010^2. Sehingga banyaknya cara memilih faktor 2010^2 yang habis dibagi 2010 adalah sama dengan cara memilih sembarang angka |2|3|5|67| (tabel menjadi satu baris saja karena baris pertama sudah dipakai oleh pembagi 2010=2 × 3 × 5 × 67) sehingga banyaknya faktor 2010^2 yang habis dibagi 2010 ada:

$$C_0^4+C_1^4+C_2^4+C_3^4+C_4^4=1+4+6+4+1=\mathbf{16}\,\boldsymbol{faktor}$$

Sehingga **<u>peluang bilangan yang terambil habis dibagi 2010 ada</u>** $\frac{\mathbf{16}\,\cancel{\boldsymbol{faktor}}}{\mathbf{81}\,\cancel{\boldsymbol{faktor}}}=\left(\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{81}}\right)$ **.**

13. Akan dicari solusi bilangan bulat (x,y) yang memenuhi persamaan $x^2 + xy = 2y^2 + 30p$ dengan p adalah bilangan prima. Persamaan ini dapat diubah menjadi: $(x)^2 + y(x) - (2y^2 + 30p) = 0$. Dengan menggunakan rumus abc, maka nilai x adalah sebagai berikut:

$$x=\frac{-y\pm\sqrt{y^2+4(2y^2+30p)}}{2}$$
$$x=\frac{-y\pm\sqrt{y^2+8y^2+120p}}{2}$$
$$x=\frac{-y\pm\sqrt{9y^2+120p}}{2}$$
$$x=\frac{-y\pm\sqrt{3(3y^2+40p)}}{2}$$
$$x=\frac{-y\pm\sqrt{9\left(\frac{3(3y^2+40p)}{9}\right)}}{2}$$
$$x=\frac{-y\pm\sqrt{3^2\left(\frac{3y^2+40p}{3}\right)}}{2}$$
$$x=\frac{-y\pm\sqrt{3^2}\sqrt{\left(\frac{3}{3}y^2+\frac{40}{3}p\right)}}{2}$$
$$\boldsymbol{x}=\frac{-\boldsymbol{y}\pm\mathbf{3}\sqrt{\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}+\frac{\mathbf{40}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{p}}}{\mathbf{2}}$$

Sehingga nilai x yang memenuhi adalah:

$$x = \frac{-y - 3\sqrt{y^2 + \frac{40}{3}p}}{2} \; atau \; x = \frac{-y + 3\sqrt{y^2 + \frac{40}{3}p}}{2}$$

Karena y adalah bilangan bulat positif, maka $\frac{-y-3\sqrt{y^2+\frac{40}{3}p}}{2}$ bernilai negatif sedangkan x bernilai positif (kontradiksi). Sehingga $\frac{-y-3\sqrt{y^2+\frac{40}{3}p}}{2}$ bukan merupakan solusi x. sehingga nilai x yang memenuhi adalah:

$$\boldsymbol{x = \frac{-y + 3\sqrt{y^2 + \frac{40}{3}p}}{2}}$$

Karena nilai x adalah bilangan bulat positif, maka $\sqrt{y^2 + \frac{40}{3}p}$ harus bilangan bulat positif juga, sehingga $y^2 + \frac{40}{3}p$ adalah bilangan kuadrat sempurna. Misalkan bilangan kuadrat itu adalah n^2, maka dapat dibentuk persamaan baru, yaitu:

$$y^2 + \frac{40}{3}p = n^2$$

$$\frac{40}{3}p = n^2 - y^2$$

$$\boldsymbol{\frac{40}{3}p = (n+y)(n-y)}$$

Oleh karena n & y adalah bilangan bulat positif, dan jelas bahwa n > y. Maka nilai dari $\frac{40}{3}p$ adalah bilangan bulat positif, untuk memenuhi syarat tersebut, maka p harus kelipatan 3. Karena p adalah bilangan prima, dan p juga kelipatan 3, maka nilai p yang memenuhi hanya 3. Sehingga didapat bahwa **p = 3 .** Dengan memasukkan nilai p ke persamaan, maka:

$$(n+y)(n-y) = \frac{40}{3}p = \frac{40}{\cancel{3}}.\cancel{3} = 40$$

Sehingga **(n + y)(n – y) = 40**. Karena sehingga n + y dan n – y adalah faktor positif dari 40. Karena n + y > n – y, maka ada beberapa kemungkinan yang akan diuji, yaitu:

(n + y)	(n – y)	(n + y)(n – y)	(n+y)-(n-y)=2y	y	Status
40	1	40	39	19,5	(Tidak Memenuhi)
20	2	40	18	9	(Memenuhi)
10	4	40	6	3	(Memenuhi)
8	5	40	3	1,5	(Tidak Memenuhi)

Sehingga nilai y yang memenuhi adalah: y = 9 atau y = 3. Karena nilai p juga telah diketahui, yaitu p = 3, maka nilai x dapat dicari.

Dengan menggunakan persamaan

$$x = \frac{-y + 3\sqrt{y^2 + \frac{40}{3}p}}{2}$$

Apabila y = 9 dan p = 3, maka:

$$x = \frac{-9 + 3\sqrt{9^2 + \frac{40}{\cancel{3}}.\cancel{3}}}{2}$$

$$x = \frac{-9 + 3\sqrt{81 + 40}}{2}$$

$$x = \frac{-9 + 3\sqrt{121}}{2}$$

$$x = \frac{-9 + 3.11}{2}$$

$$x = \frac{-9 + 33}{2}$$

$$x = \frac{33 - 9}{2}$$

$$x = \frac{24}{2}$$

$$\underline{x = 12}$$

Sehingga solusi pertama adalah **p = 3 ; x = 12 ; y = 9.**

Apabila y = 3 dan p = 3, maka:

$$x=\frac{-3+3\sqrt{3^2+\frac{40}{\cancel{3}}.\cancel{3}}}{2}$$
$$x=\frac{-3+3\sqrt{9+40}}{2}$$
$$x=\frac{-3+3\sqrt{49}}{2}$$

$$x=\frac{-3+3.7}{2}$$
$$x=\frac{-3+21}{2}$$
$$x=\frac{21-3}{2}$$

$$x=\frac{18}{2}$$
$$\underline{x=9}$$

Sehingga solusi kedua adalah **p = 3 ; x = 9 ; y = 3**

Maka **pasangan bilangan bulat positif (x, y) yang memenuhi persamaan $x^2 + xy = 2y^2 + 30p$ ada 2, yaitu (12, 9) dan (9, 3).**

14. Dengan menggunakan logika, diketahui bahwa persegi panjang berukuran 25 × 20 tidak akan dapat dibuat 1 bujursangkar yang menutupi seluruh bagian persegi panjang tersebut, karena sisi – sisi bujursangkat adalah sama dan apabila dibuat 2 bujursangkar, maka juga tidak akan dapat menutupi seluruh bagian persegi panjang tersebut, karena jika 2 bujursangkar digabungkan, maka itu hanya akan dapat menutupi persegi panjang dengan panjang = 2 kali lebar. Sedangkan persegi panjang yang akan ditutupi adalah persegi panjang dengan ukuran 25 × 20. Apabila dibuat 3 bujursangkar, juga tidak mungkin dapat dibuat karena persegi panjang yang dapat ditutupi dengan 3 bujursangkar adalah persegi panjang yang memenuhi hubungan panjang – lebar berikut:

$$p-l=\frac{1}{2}l$$

Hal ini tidak memenuhi dengan persegi panjang yang akan ditutupi dengan p = 25, dan l = 20:

$$25-20\neq\frac{1}{2}.20$$
$$5\neq 10$$

Apabila dibuat 4 bujursangkar, juga tidak mungkin memenuhi, karena persegi panjang yang dapat ditutupi dangan 4 bujur sangkar adalah persegi panjang yang memenuhi p = 4l atau p=l. Sehingga jumlah bujur sangkar yang dapat menutupi seluruh bagian persegi panjang 25×20 minimum ada 5 bujur sangkar, ini memenuhi syarat hubungan panjang – lebar suatu persegi panjang yang akan dapat ditutupi oleh 5 bujur sangkar, yaitu:

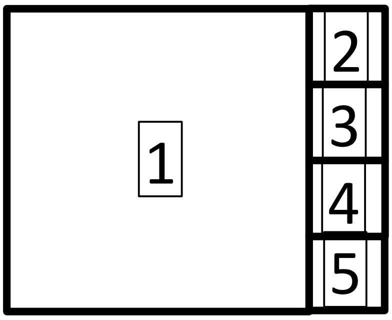
$$p-l=\frac{1}{4}l$$

Hal ini memenuhi dengan persegi panjang yang akan ditutupi dengan p = 25, dan l = 20:

$$25-20=\frac{1}{4}.20$$
$$5=5$$

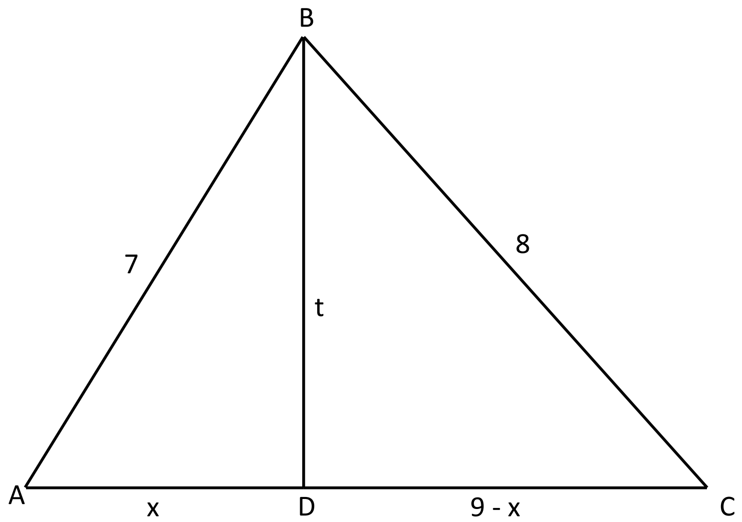
Sehingga bujursangkar yang mungkin dapat dibuat adalah 1 bujursangkar ukuran 20 × 20, dan 4 bujursangkar dengan ukuran 5 × 5. Jika kelima bujursangkar ini digabung maka akan dapat dibentuk persegi panjang dengan ukuran 25 × 20. Perhatikan gambar berikut:

(Persegi 1 berukuran 20 × 20 dan persegi 2,3,4,&5 memiliki berukuran 5 × 5)



Sehingga **<u>banyak bujursangkar yang mungkin dapat dibuat adalah 5 bujursangkar.</u>**

15. Langkah pertama adalahgambarkan maksud soalnya:



Misalkan Panjang BD = t dan panjang AD = x, karena panjang AC = 9, dan DC = AC – AD, maka DC = 9 – x. Dengan menggunakan persamaan phytagoras pada segitiga ABD dan segitiga BCD, dapat dibentuk 2 persamaan, yaitu:

$$(9-x)^2 + t^2 = 8^2$$
$$x^2 + t^2 = 7^2$$

Apabila kedua persamaan ini dikurangkan, maka:

$$[(9-x)^2 + t^2] - (x^2 + t^2) = 8^2 - 7^2$$
$$(9-x)^2 + t^2 - x^2 - t^2 = 8^2 - 7^2$$
$$(9-x)^2 + \cancel{t^2} - x^2 - \cancel{t^2} = 64 - 49$$
$$(9-x)^2 - x^2 = 15$$
$$9^2 - 2.9x + x^2 - x^2 = 15$$
$$9^2 - 18x + (x^2 - x^2) = 15$$
$$81 - 18x + 0 = 15$$

$$81 - 18x = 15$$
$$81 - 15 = 18x$$
$$66 = 18x$$
$$18x = 66$$
$$x = \frac{66}{18} = \frac{11}{3}$$

Sehingga nilai $x = \frac{11}{3}$

Karena panjang x sama dengan panjang AD. Maka didapat bahwa **panjang $AD = \left(\frac{11}{3}\right)$.**

16. Misalkan polinom P(x) dibagi oleh $x^2 + x - 2$ memiliki hasil polinom f(x) dengan sisa pembagian – 5x + 2000, maka dapat dibuat persamaan sebagai berikut:

$$\frac{P(x)}{x^2+x-2} = f(x) + \frac{-5x+2000}{x^2+x-2} = \frac{(x^2+x-2)f(x) - 5x + 2000}{x^2+x-2}$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa:

$$P(x) = (x^2+x-2)f(x) - 5x + 2000$$

Akan dicari sisa pembagian P(x) oleh x+2. Karena P(x) = $(x^2 + x - 2)$.f(x) – 5x +2000, maka dapat dibentuk persamaan sebagai berikut:

$$\frac{P(x)}{x+2} = \frac{(x^2+x-2)f(x) - 5x + 2000}{x+2} = \frac{(x+2)(x-1)f(x) - 5x - 10 + 10 + 2000}{x+2}$$
$$\frac{P(x)}{x+2} = \frac{(x+2)(x-1)f(x) - 5(x+2) + 10 + 2000}{x+2} = \frac{(x+2)[(x-1)f(x) - 5] + 2010}{x+2}$$
$$\frac{P(x)}{x+2} = \frac{\cancel{(x+2)}[(x-1)f(x) - 5]}{\cancel{x+2}} + \frac{2010}{x+2}$$
$$\frac{P(x)}{x+2} = (x-1)f(x) - 5 + \frac{\mathbf{2010}}{x+2}$$

Maka, apabila polinom P(x) dibagi oleh x + 2, maka akan memiliki hasil bagi (x – 1).f(x) – 5 dengan sisa pembagian 2010. Sehingga **sisa pembagian P(x) oleh x + 2adalah 2010.**

17. Langkah pertama adalah menyederhanakan persamaan pada soal dengan proses sebagai berikut:

$$\sqrt[n]{x^{x^2}} \leq x^{\sqrt[n]{x^2}}$$

$$x^{\left(\frac{x^2}{n}\right)} \le x^{x^{\left(\frac{2}{n}\right)}}$$
$$\log x^{\left(\frac{x^2}{n}\right)} \le \log x^{x^{\left(\frac{2}{n}\right)}}$$
$$\left(\frac{x^2}{n}\right) \log x \le x^{\left(\frac{2}{n}\right)} \log x$$
$$\frac{\left(\frac{x^2}{n}\right) \cancel{\log x}}{\cancel{\log x}} \le \frac{x^{\left(\frac{2}{n}\right)} \cancel{\log x}}{\cancel{\log x}}$$

$$\left(\frac{x^2}{n}\right) \le x^{\left(\frac{2}{n}\right)}$$
$$\left(\frac{x^2}{x^{\left(\frac{2}{n}\right)}}\right) \le n$$
$$x^{2-\frac{2}{n}} \le n$$
$$\log x^{2-\frac{2}{n}} \le \log n$$

$$\left(2-\frac{2}{n}\right) \log x \le \log n$$
$$\log x \le \frac{\log n}{2-\frac{2}{n}}$$

Karena $x \le \sqrt[5]{216}$maka $\log x \le \log \sqrt[5]{216}$karena $\sqrt[5]{216}$ adalah $\sqrt[5]{6^3} = 6^{\frac{3}{5}}$, maka $\log \sqrt[5]{216} = \frac{3}{5}\log 6$ sehingga $\log x \le \frac{3}{5}\log 6$. Maka, telah didapat 2 persamaan, yaitu:

$$\log x \le \frac{\log n}{2-\frac{2}{n}}$$
$$\log x \le \frac{3}{5}\log 6$$

Karena nilai n adalah bilangan asli, maka jika kedua persamaan diatas dikurangkan, maka didapat persamaan baru, yaitu:

$$\log x - \log x = \frac{\log n}{2-\frac{2}{n}} - \frac{3}{5}\log 6$$
$$\frac{\log n}{2-\frac{2}{n}} - \frac{3}{5}\log 6 = 0$$

$$\frac{\log n}{2-\frac{2}{n}} = \frac{3}{5}\log 6$$

Karena suatu penyebut pecahan tidak boleh 0, maka:

$$2-\frac{2}{n} \ne 0$$

$$2n - \frac{2}{\cancel{n}}.\cancel{n} \ne 0.\cancel{n}$$
$$2n - 2 \ne 0$$

$$2n \ne 2$$
$$n \ne \frac{2}{2}$$

$$n \ne 1$$

Maka n tidak mungkin bernilai 1, atau **n ≠ 1.**

Kemudian persamaan diolah kembali dengan kali silang, sehingga didapat:

$$\frac{\log n}{\log 6} = \frac{3}{5}\left(2-\frac{2}{n}\right) = \frac{3}{5}.\frac{2n-2}{n} = \frac{6n-6}{5n}$$

Karena nilai n adalah bilangan asli, maka pada ruas kiri dan ruas kanan harus merupakan bilangan asli pula. Sehingga nilai n yang memenuhi hanya 6. Jika dimasukkan ke persamaan akhir, hal ini memenuhi:

$$\frac{\log n}{\log 6} = \frac{6n-6}{5n}$$

Jika n=6, maka:

$$\frac{\log 6}{\log 6} = \frac{6.6-6}{5.6}$$
$$\frac{\cancel{\log 6}}{\cancel{\log 6}} = \frac{36-6}{30} = \frac{30}{30} = 1$$
$$1 = 1 \text{ "}(memenuhi)\text{"}$$

Sehingga nilai n = 6 memenuhi persamaan tersebut. Maka **<u>bilangan asli n yang memenuhi adalah = 6.</u>**

18. Pewarnaan 3 kotak hitam secara acak dari 16 kotak adalah:

$$C_3^{16} = \frac{16!}{(16-3)!\,3!} = \frac{16!}{13!\,.3.2.1} = \frac{16.15.14.\cancel{13!}}{\cancel{13!}.6} = \frac{8.\cancel{2.3}.5.14}{\cancel{2.3}} = 8.5.14 = 8.70 = 560\ cara$$

Namun, perotasian juga diperhatikan pada kasus ini, sumbu simetri rotasi pada persegi ada 4, sehingga ada 4 cara pewarnaan yang dianggap sama karena rotasi, sehingga total cara pewarnaan adalah:

$$\frac{560}{4} cara = \boldsymbol{140 cara}$$

Sehingga **<u>cara pewarnaannya adalah sebanyak 140 Cara.</u>**

19. Menurut aturan Sinus sudut rangkap, ada rumus:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

Sehingga:

$$\frac{\boldsymbol{\sin 2\alpha}}{\boldsymbol{2\sin\alpha}} = \boldsymbol{\cos\alpha}$$

Dengan mensubtitusikan rumus diatas yang bercetak tebal ke dalam persamaan soal, maka didapat:

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)} = 2^{2010}\sqrt{2}\ \cos\left(\frac{x}{2}\right)\ \cos\left(\frac{x}{4}\right)\ .\ .\ .\ \cos\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)$$

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)} = 2^{2010}\sqrt{2}\ \frac{\sin 2.\left(\frac{x}{2}\right)}{2.\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.\frac{\sin 2.\left(\frac{x}{4}\right)}{2.\mathit{sin}\left(\frac{x}{4}\right)}\ .\ .\ .\ \frac{\sin 2.\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)}$$

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)} = 2^{2010}\sqrt{2}\ \frac{\sin x}{2.\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2.\mathit{sin}\left(\frac{x}{4}\right)}\ .\ .\ .\ \frac{\sin\left(\frac{x}{2^{2009}}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)}$$

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)} = 2^{2010}\sqrt{2}\ \frac{\sin x}{2.\cancel{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}.\frac{\cancel{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}{2.\cancel{\mathit{sin}\left(\frac{x}{4}\right)}}\ .\ .\ .\ \frac{\cancel{\sin\left(\frac{x}{2^{2009}}\right)}}{2\sin\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)}$$

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)} = 2^{2010}\sqrt{2}\ \frac{\sin x}{2}.\frac{1}{2}\ .\ .\ .\ \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)}$$

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)} = 2^{2010}\sqrt{2}\ \frac{\sin x}{2^{2010}\sin\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)}$$

$$\frac{\sin\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)} = 2^{2010}\sqrt{2}\ \frac{\sin x}{2^{2010}}$$

$$\frac{\sin\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)} = \sin x\ \sqrt{2}\ \frac{2^{2010}}{2^{2010}}$$

$$\frac{\cancel{\sin\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)}}{\cancel{\sin\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)}} = \sin x\ \sqrt{2}\ \frac{\cancel{2^{2010}}}{\cancel{2^{2010}}}$$

Sehingga didapat persamaan yang sederhana, yaitu:

$$\sqrt{2}\sin x = 1 \rightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Sehingga nilai x yang memenuhi persamaan pada soal adalah nilai x yang memenuhi persamaan:

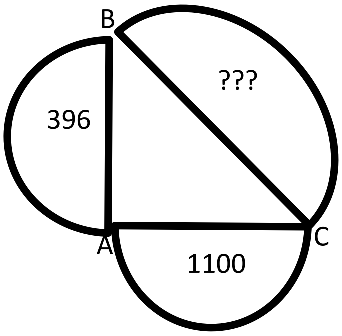
$$\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Karena 0 ≤ x ≤ π dalam rad, atau 0 ≤ x ≤ 180^o lam derajat, maka nilai x yang memenuhi adalah 45^o dan 135^o , sehngga nilai x adalah:

$$\frac{45}{180}\pi\ rad = \boldsymbol{\frac{\pi}{4} rad}\ dan\ \frac{135}{180}\pi\ rad = \boldsymbol{\frac{3}{4}\pi\ rad}$$

Sehingga **<u>nilai x yang memenuhi persamaan tersebut adalah 0,25π rad dan 0,75π rad.</u>**

20. Langkah pertama adalahgambarkan maksud soalnya:



Misalkan panjang AB = 2r panjang AC = 2R, maka luas setengah lingkaran dengan diameter AB adalah: $\frac{1}{2}\pi r^2 = 396$, maka didapat: $r = \sqrt{\frac{2.396}{\pi}}$. Sedangkan luas setengah lingkaran dengan diameter AC adalah: $\frac{1}{2}\pi R^2 = 1100$, maka didapat: $R = \sqrt{\frac{2.1100}{\pi}}$. Menurut atrnan phytagoras, maka didapat:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$
$$(2r)^2 + (2R)^2 = BC^2$$

Sedangkan luas setengah lingkaran dengan diameter BC adalah:

$$\frac{1}{2}\pi.\left(\frac{1}{2}BC\right)^2 = \frac{1}{8}\pi.BC^2 = \frac{1}{8}\pi((2r)^2 + (2R)^2)$$

Dengan memasukkan nili r dan R, maka didapat:

$$\frac{1}{8}\pi((2r)^2 + (2R)^2) = \frac{1}{8}\pi\left(\left(2\sqrt{\frac{2.396}{\pi}}\right)^2 + \left(2\sqrt{\frac{2.1100}{\pi}}\right)^2\right)$$
$$\frac{1}{8}\pi\left(4.\frac{2.396}{\pi} + 4.\frac{2.1100}{\pi}\right) = \frac{\pi}{8}\left(8.\frac{396}{\pi} + 8.\frac{1100}{\pi}\right)$$
$$\frac{\pi}{8}.\frac{8}{\pi}(396 + 1100) = 1.1496 = \mathbf{1496}$$

Sehingga didapat **<u>luas setengah lingkaran pada sisi BC adalah 1496.</u>**