

**SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2010
TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2011**

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika



Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

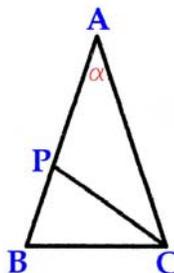
Olimpiade Matematika Tk Kabupaten/Kota 2010

1. Misalkan $n^2 + n + 2010 = k^2$ untuk suatu bilangan asli k .
 $n^2 + n + 2010 - k^2 = 0$ yang merupakan persamaan kuadrat dalam n .
Karena n bilangan bulat maka diskriminan persamaan tersebut harus merupakan bilangan kuadrat sempurna.
 $1^2 - 4(1)(2010 - k^2) = m^2$ untuk suatu bilangan asli m .
 $8039 = 4k^2 - m^2 = (2k + m)(2k - m)$
Karena 8039 merupakan bilangan prima maka
 $2k + m = 8039$ dan $2k - m = 1$
Maka $4k = 8040$ sehingga $k = 2010$ dan $m = 4019$
Jadi $n^2 + n + 2010 = 2010^2$
 $(n - 2009)(n + 2010) = 0$
 \therefore Jadi, bilangan asli n yang memenuhi adalah $n = 2009$.

2. $x^4 \leq 8x^2 - 16$
 $(x^2 - 4)^2 \leq 0$
Karena bilangan kuadrat tidak mungkin negatif maka penyelesaian ketaksamaan tersebut adalah
 $x^2 - 4 = 0$
Bilangan bulat x yang memenuhi adalah $x = 2$ atau $x = -2$.
 \therefore Jadi, bilangan bulat x yang memenuhi ada sebanyak 2.

3. $2x + 5y = 2010$ untuk pasangan bilangan asli (x, y)
Karena $5y$ dan 2010 habis dibagi 5 maka x habis dibagi 5 sehingga $x = 5a$ dengan $a \in \mathbb{N}$.
Karena $2x$ dan 2010 habis dibagi 2 maka y habis dibagi 2 sehingga $y = 2b$ dengan $b \in \mathbb{N}$.
 $10a + 10b = 2010$
 $a + b = 201$
Karena $a, b \in \mathbb{N}$ maka ada 200 pasangan (a, b) yang memenuhi sehingga ada 200 pasangan (x, y) yang memenuhi.
 \therefore Jadi, banyaknya pasangan bilangan asli (x, y) yang memenuhi ada sebanyak 200.

4. Misalkan besarnya sudut $A = \alpha$



Karena $AP = PC$ maka $\angle ACP = \alpha$ sehingga $\angle BPC = 2\alpha$.
Karena $PC = CB$ maka $\angle CBP = 2\alpha$ sehingga $\angle PCB = 180^\circ - 4\alpha$
Karena $AB = AC$ maka $\angle CBP = \angle ACB = \angle ACP + \angle PCB$
 $2\alpha = (\alpha) + (180^\circ - 4\alpha)$
 $\alpha = 36^\circ$
 \therefore Jadi, besarnya sudut A adalah 36° .

Olimpiade Matematika Tk Kabupaten/Kota 2010

5. Misalkan $M = \underbrace{20102010\dots2010}_{n \text{ buah } 2010}$ habis dibagi 99.

Karena M habis dibagi 99 maka M habis dibagi 9 dan 11.

Jumlah angka-angka $M = 3n$ yang harus habis dibagi 9 sebab M habis dibagi 9.

Selisih jumlah angka pada posisi genap dan posisi ganjil dari M sama dengan $3n$ yang harus habis dibagi 11 sebab M habis dibagi 11.

Jadi, $3n$ habis dibagi 9 dan 11.

Nilai terkecil n yang memenuhi adalah 33.

\therefore Jadi, nilai terkecil n yang memenuhi adalah 33.

6. Hanya ada 5 pertandingan yang berpengaruh sehingga tercapai hasil A bertemu G di final dan A menjadi juara yaitu A mengalahkan B, A mengalahkan pemenang C atau D, G mengalahkan H, G mengalahkan E atau F dan A mengalahkan G.

Pada masing-masing pertandingan, peluang salah satu tim tertentu memenangkan pertandingan adalah $\frac{1}{2}$. Maka peluang A mengalahkan G di final adalah $(\frac{1}{2})^5$.

\therefore Jadi, peluang A mengalahkan G di final adalah $\frac{1}{32}$.

7. Polinom $P(x) = x^3 - x^2 + x - 2$ mempunyai tiga pembuat nol yaitu a , b dan c . Maka

$$a + b + c = 1$$

$$ab + ac + bc = 1$$

$$abc = 2$$

Alternatif 1 :

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(ab + ac + bc)(a + b + c) - 3abc$$

$$1^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(1)(1) - 3(2)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 4$$

Alternatif 2 :

Karena a , b , dan c adalah akar-akar persamaan $x^3 - x^2 + x - 2 = 0$ maka

$$a^3 - a^2 + a - 2 = 0$$

$$b^3 - b^2 + b - 2 = 0$$

$$c^3 - c^2 + c - 2 = 0$$

Jumlahkan ketiga persamaan didapat

$$a^3 + b^3 + c^3 - (a^2 + b^2 + c^2) + (a + b + c) - 6 = 0$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) - (a + b + c) + 6$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 1^2 - 2(1) - 1 + 6$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 4$$

\therefore Jadi, nilai $a^3 + b^3 + c^3 = 4$.

8. $\sqrt{2010 + 2\sqrt{2009}} = \sqrt{2009} + 1$

Alternatif 1 :

$\sqrt{2009} + 1$ merupakan solusi persamaan $x^2 + ax + b = 0$, maka

$$(\sqrt{2009} + 1)^2 + a(\sqrt{2009} + 1) + b = 0$$

Olimpiade Matematika Tk Kabupaten/Kota 2010

$$2010 + 2\sqrt{2009} + a\sqrt{2009} + a + b = 0$$

Karena a dan b bilangan bulat maka

$$2\sqrt{2009} + a\sqrt{2009} = 0 \text{ dan } 2010 + a + b = 0$$

Didapat $a = -2$ dan $b = -2008$

Maka $a + b = -2010$

Alternatif 2 :

$$x^2 + ax + b = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

$$\text{Maka } \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \sqrt{2009} + 1$$

$$-a + \sqrt{a^2 - 4b} = 2\sqrt{2009} + 2$$

Karena a dan b bilangan bulat maka $-a = 2$ sehingga $a = -2$

$$a^2 - 4b = 4 \cdot 2009$$

$$1 - b = 2009 \text{ sehingga } b = -2008$$

Maka $a + b = -2 - 2008 = -2010$.

\therefore Jadi, $a + b = -2010$.

9. $\{1, 2, 3, \dots, 1000\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, \dots, 2010\}$

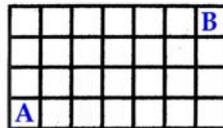
Jika H memiliki k elemen maka banyaknya himpunan bagian dari H adalah 2^k .

Elemen 1, 2, 3, ..., 1000 haruslah merupakan elemen dari X. Persoalannya sama saja dengan $X \subseteq \{1001, 1002, 1003, \dots, 2010\}$

Banyaknya himpunan bagian dari X tersebut adalah 2^{1010} .

\therefore Jadi, banyaknya himpunan X yang memenuhi adalah 2^{1010} .

10. Jalan terpendek dari A ke B adalah jika jalannya hanya Kanan dan Atas saja. Ukuran grid 4 x 7.



Banyaknya langkah terpendek adalah 7 sebab banyaknya langkah ke Kanan ada 5 dan ke Atas ada 2. Tidak ada jalan dengan banyaknya langkah tepat 8 sebab jika berjalan ke Kiri atau ke Bawah sekali, maka banyaknya langkah terpendek yang diperlukan adalah 9.

Jadi cukup dihitung banyaknya jalan dengan banyaknya langkah tepat 7.

Alternatif 1 :

Misalkan langkah ke Kanan diberi tanda 1 dan langkah ke Atas diberi tanda 2. Maka persoalannya sama dengan banyaknya susunan angka-angka 1111122, yaitu melangkah ke Kanan sebanyak 5 kali dan melangkah ke Atas sebanyak 2 kali.

Banyaknya susunan bilangan 1111122 sama dengan $\frac{7!}{5!2!} = 21$.

Maka banyaknya cara melangkah dari A ke B sama dengan 21.

Alternatif 2 :

Banyaknya langkah ada 7. Dua di antaranya adalah ke Atas dan 5 ke Kanan. Maka persoalan ini adalah sama dengan menempatkan 5 obyek identik pada 7 tempat berbeda.

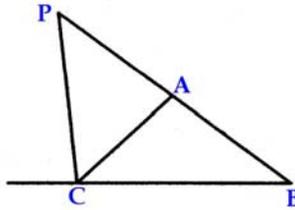
Maka banyaknya cara melangkah dari A ke B sama dengan ${}^7C_2 = 21$.

\therefore Jadi, banyaknya cara melangkah dari A ke B sama dengan 21.

Olimpiade Matematika Tk Kabupaten/Kota 2010

Catatan : Ada perbedaan antara kata-kata pada soal dan gambar pada soal. Berdasarkan kata-kata pada soal maka ukuran gridnya adalah 4×8 sedangkan pada gambar ukuran gridnya adalah 4×7 . Kunci jawaban dari pusat mengacu pada gambar. Jika yang diacu adalah kata-kata pada soal maka jawabannya adalah ${}_8C_2 = 28$.

11.



PC adalah garis bagi $\triangle ABC$ sehingga berlaku

$$\frac{CB}{AC} = \frac{PB}{PA}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{PB}{PA}$$

Maka dapat dimisalkan $PB = 4k$ dan $PA = 3k$ sehingga $AB = k$

Maka $PA : AB = 3k : k = 3 : 1$

\therefore Jadi, perbandingan $PA : AB$ adalah $3 : 1$.

12. $2010^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 67^2$.

$$2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$$

Faktor-faktor positif dari 2010^2 akan berbentuk $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 67^d$ dengan $0 \leq a, b, c, d \leq 2$ dengan a, b, c, d bilangan bulat.

$$\text{Banyaknya faktor positif } 2010^2 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

Agar faktor tersebut merupakan kelipatan 2010 maka $1 \leq a \leq 2, 1 \leq b \leq 2, 1 \leq c \leq 2, 1 \leq d \leq 2$.

$$\text{Banyaknya faktor positif } 2010^2 \text{ yang merupakan kelipatan } 2010 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16.$$

\therefore Jadi, peluang bilangan yang terambil habis dibagi 2010 adalah $\frac{16}{81}$

13. $x^2 + xy = 2y^2 + 30p$

$$(x - y)(x + 2y) = 30p$$

Jika x dan y keduanya tidak memiliki sisa yang sama jika dibagi 3 maka $x - y$ dan $x + 2y$ keduanya tidak ada yang habis dibagi 3. Padahal $30p$ habis dibagi 3. Jadi, x dan y haruslah keduanya memiliki sisa yang sama jika dibagi 3.

Akibatnya $x - y$ dan $x + 2y$ masing-masing habis dibagi 3 sehingga $30p$ harus habis dibagi 9.

Karena 30 habis dibagi 3 tetapi tidak habis dibagi 9 maka p harus habis dibagi 3.

Karena p adalah bilangan prima maka $p = 3$.

$$(x - y)(x + 2y) = 90$$

Karena $x + 2y \geq x - y$ maka akan ada 2 kasus.

* $x + 2y = 30$ dan $x - y = 3$

$$\text{Didapat } x = 12 \text{ dan } y = 9$$

* $x + 2y = 15$ dan $x - y = 6$

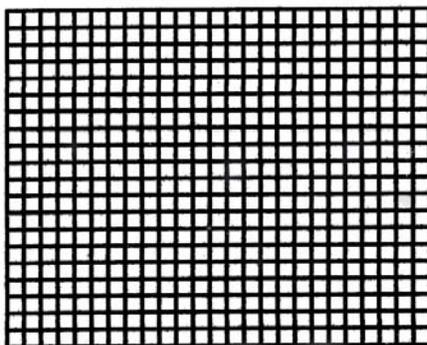
$$\text{Didapat } x = 9 \text{ dan } y = 3$$

Maka pasangan bilangan bulat positif (x, y) yang memenuhi adalah $(12, 9)$ dan $(9, 3)$.

\therefore Jadi, banyaknya pasangan bilangan bulat positif (x, y) yang memenuhi ada sebanyak 2.

Olimpiade Matematika Tk Kabupaten/Kota 2010

14. Perhatikan gambar.



Banyaknya persegi dengan ukuran 1 x 1 ada sebanyak $25 \times 20 = 500$

Banyaknya persegi dengan ukuran 2 x 2 ada sebanyak $24 \times 19 = 456$

Banyaknya persegi dengan ukuran 3 x 3 ada sebanyak $23 \times 18 = 414$

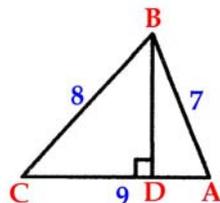
⋮

Banyaknya persegi dengan ukuran 20 x 20 ada sebanyak $6 \times 1 = 6$

Banyaknya semua persegi yang ada = $500 + 456 + 414 + \dots + 6 = 3920$.

∴ Jadi, banyaknya semua persegi yang ada = 3920.

15. Perhatikan gambar.



Alternatif 1 :

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c) = 12$$

Dengan rumus Heron didapat

$$[ABC] = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 12\sqrt{5}$$

$$\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = 12\sqrt{5}$$

$$9 \cdot BD = 24\sqrt{5} \text{ sehingga } BD = \frac{8}{3}\sqrt{5}$$

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = 49 - \frac{320}{9} = \frac{121}{9}$$

$$AD = \frac{11}{3}$$

Alternatif 2 :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$8^2 = 9^2 + 7^2 - 2 \cdot 9 \cdot 7 \cos A$$

$$\cos A = \frac{11}{21}$$

$$AD = AB \cos A = 7 \cdot \frac{11}{21}$$

$$AD = \frac{11}{3}$$

∴ Jadi, panjang AD = $\frac{11}{3}$

Olimpiade Matematika Tk Kabupaten/Kota 2010

16. $P(x) = Q(x) \cdot (x + 2)(x - 1) - 5x + 2000$

$$P(-2) = 0 - 5(-2) + 2000 = 2010$$

$P(-2)$ menyatakan sisa jika $P(x)$ dibagi $x + 2$.

∴ Jadi, sisa jika $P(x)$ dibagi $x + 2$ adalah 2010.

Catatan : Soal aslinya adalah $P(x)$ dibagi $x^2 - x - 2$ bersisa $-5x + 2000$, tetapi Penulis berkeyakinan seharusnya adalah $P(x)$ dibagi $x^2 + x - 2$ bersisa $-5x + 2000$.

17. Penyelesaian $\sqrt[n]{x^{x^2}} \leq x^{\sqrt[n]{x^2}}$ dipenuhi oleh $\{x \mid 0 < x \leq \sqrt[5]{216}\}$ untuk suatu bilangan asli n .

$$x^{\frac{x^2}{n}} \leq x^{\frac{2}{n}}$$

- Jika $x \geq 1$ maka

$$\frac{x^2}{n} \leq \frac{2}{n}$$

$$x \leq n^{\frac{n}{2n-2}}$$

- Jika $0 < x < 1$ maka

$$\frac{x^2}{n} \geq \frac{2}{n}$$

$$x \geq n^{\frac{n}{2n-2}}$$

Karena n bilangan asli maka $n^{\frac{n}{2n-2}} \geq 1$.

- Jika $x < 0$ maka karena $\frac{x^2}{n}$ dan $x^{\frac{2}{n}}$ tidak dapat dipastikan merupakan bilangan rasional maka tidak ada definisi jika $x < 0$.

Maka penyelesaian ketaksamaan tersebut adalah $1 \leq x \leq n^{\frac{n}{2n-2}}$.

Karena penyelesaian ketaksamaan tersebut adalah $0 < x \leq \sqrt[5]{216} = 6^{\frac{3}{5}}$ maka

$n = 6^k$ dan $\frac{n}{2n-2} = \frac{3}{5k}$ untuk suatu bilangan asli k .

$$6^k \cdot 5k = 6 \cdot 6^k - 6$$

$$6^{1-k} = 6 - 5k$$

Jika $k > 1$ maka ruas kiri merupakan pecahan sedangkan ruas kanan merupakan bilangan bulat sehingga tidak akan tercapai kesamaan.

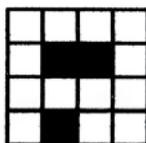
Jika $k = 1$ maka $1 = 6 - 5(1)$ yang memenuhi persamaan.

$$\text{Jadi, } n = 6^1 = 6$$

∴ Jadi, nilai bilangan asli n yang memenuhi adalah $n = 6$.

Catatan : Terbukti bahwa dalam batas $0 < x < 1$ tidak memenuhi ketaksamaan. Maka pada soal, himpunan penyelesaian ketaksamaan tersebut seharusnya $\{x \mid 1 \leq x \leq \sqrt[5]{216}\}$

18. Perhatikan gambar. Rotasi yang dimaksud adalah 90° , 180° dan 270° sehingga jika sebuah petak berwarna hitam dirotasi akan timbul 3 petak lain yang berbeda dengan petak semula. Jadi, jika 3 petak berwarna hitam dirotasikan maka tidak akan ada hasilnya yang menempati ketiga petak semula.



Olimpiade Matematika Tk Kabupaten/Kota 2010

Persoalan ini sama saja dengan banyaknya memilih 3 petak dari 16 petak yang ada = ${}_{16}C_3$ lalu hasilnya dapat dibagi ke dalam ${}_{16}C_4 : 4$ kelompok dengan masing-masing kelompok merupakan rotasi dari petak-petak lainnya.

Maka banyaknya cara pewarnaan = $\frac{{}_{16}C_3}{4} = 140$.

∴ Jadi, banyaknya cara pewarnaan = 140.

19. $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)} = 2^{2010} \sqrt{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdots \cos\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)$$

$$1 = 2^{2010} \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdots \cos\left(\frac{x}{2^{2010}}\right) \sin\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)$$

$$1 = 2^{2009} \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdots \sin\left(\frac{x}{2^{2009}}\right)$$

$$1 = 2^{2008} \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdots \sin\left(\frac{x}{2^{2008}}\right)$$

Sehingga didapat

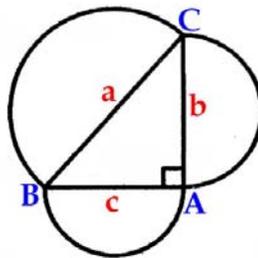
$$1 = \sqrt{2} \sin x$$

$$\sin x = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Maka } x = \frac{\pi}{4} \text{ atau } x = \frac{3\pi}{4}$$

∴ Jadi, nilai x yang memenuhi adalah $x = \frac{\pi}{4}$ atau $x = \frac{3\pi}{4}$

20. Perhatikan gambar.



$$\text{Luas setengah lingkaran AB} = \frac{1}{8} \pi c^2 = 396.$$

$$\text{Luas setengah lingkaran AC} = \frac{1}{8} \pi b^2 = 1100.$$

$$\text{Luas setengah lingkaran BC} = \frac{1}{8} \pi a^2 = \frac{1}{8} \pi (b^2 + c^2) = 1100 + 396 = 1496.$$

∴ Jadi, luas setengah lingkaran pada sisi BC sama dengan 1496.

Catatan : Kunci dari pusat terhadap persoalan ini adalah 704 yang menurut Penulis, kesalahannya ada pada segitiga ABC siku-siku di A yang mungkin seharusnya di B atau C.